

第2讲 一元二次方程的判别式和根系关系

一、一元二次方程的判别式

一元二次方程
判别式

对于方程 $ax^2 + bx + c = 0$
(a 、 b 、 c 为常数且 $a \neq 0$)，
由配方法可得_____

当 $\Delta =$ _____, 方程有_____个_____的实数根

当 $\Delta =$ _____, 方程有_____个_____的实数根

当 $\Delta =$ _____, 方程_____实数根

🍎 举个“栗子”

栗子1

1. 一元二次方程 $x^2 - 2x + 3 = 0$ 的解得情况是() .
- A. 有两个不相等的实数根 B. 有两个相等的实数根
C. 没有实数根 D. 无法确定

栗子2

2. 若关于 x 的一元二次方程 $(k-1)x^2 - 4x + 1 = 0$ 有实数根，则 k 的取值范围是_____ .
3. 若关于 x 的方程 $kx^2 - 3x - \frac{9}{4} = 0$ 有实数根，则实数 k 的取值范围是() .
- A. $k = 0$ B. $k \geq -1$ 且 $k \neq 0$ C. $k \geq -1$ D. $k > -1$
4. 如果关于 x 的一元二次方程 $kx^2 - \sqrt{2k+1}x - 1 = 0$ 没有实数根，那么 k 的取值范围是_____ .
5. 已知 $ax^2 + bx + c = 0$ 与 $cx^2 + bx + a = 0$ 是两个关于 x 的一元二次方程，下列判断不正确的是() .
- A. 如果方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 有两个实数根，那么方程 $cx^2 + bx + a = 0$ 也有两个实数根
B. 如果 m 是方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 的一个根，那么 $\frac{1}{m}$ 是方程 $cx^2 + bx + a = 0$ 的一个根
C. 如果方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 与方程 $cx^2 + bx + a = 0$ 有一个根相等，那么这个根是1
D. 如果方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 与方程 $cx^2 + bx + a = 0$ 有一个根相等，那么这个根是1或-1

栗子3

6. 已知，关于 x 的方程 $2x^2 - mx + n = 0$.
- (1) 当 $m - n = 4$ 时，判断方程根的情况 .
- (2) 若方程有两个相等的实数根，当 $n = 2$ 时，求此时方程的根 .

7. 已知, 关于 x 的方程 $(m-1)x^2 - (m-2)x + \frac{1}{4}m = 0$.

(1) 当 m 取何值时方程有一个实数根?

(2) 当 m 取何值时方程有两个实数根?

栗子4

8. 已知整数 $k < 5$, 若 $\triangle ABC$ 的边长均满足关于 x 的方程 $x^2 - 3\sqrt{k}x + 8 = 0$, 则 $\triangle ABC$ 的周长是 _____.

独步天下1

9. 已知: 关于 x 的方程 $kx^2 - (4k+1)x + 3k+3 = 0$.

(1) 请说明: 此方程必有实数根.

(2) 若 k 为整数, 且该方程的根都是整数, 直接写出 k 的值.

二、一元二次方程的根系关系

探究:

从因式分解法可知, 方程 $(x-x_1)(x-x_2) = 0$ (x_1, x_2 为已知数) 的两根为 x_1 和 x_2 , 将方程化为一般式后, 你能说一说两个根和系数之间的关系吗?

上述探究针对于二次项系数为 1 的一元二次方程, 现在我们拓展到一般式

$ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) 中继续进行探究:

当 $\Delta \geq 0$, 即方程有实数根, 由 _____ 可知,

$x_1 + x_2 =$ _____,

$x_1 x_2 =$ _____.

! 总结:

因此, 方程的两个根 x_1, x_2 和系数 a, b, c 有如下关系:

_____.

举个“栗子”

栗子5

10. 关于 x 的一元二次方程 $x^2 + 3x + m - 1 = 0$ 的两个实数根分别为 x_1, x_2 .

(1) 求 m 的取值范围.

(2) 若 $2(x_1 + x_2) + x_1 x_2 + 10 = 0$, 求 m 的值.

栗子6

11. 如果关于 x 的一元二次方程 $x^2 + px + q = 0$ 的两根分别为 $x_1 = 3$, $x_2 = 1$, 那么这个一元二次方程是 () .
- A. $x^2 + 3x + 4 = 0$ B. $x^2 + 4x - 3 = 0$ C. $x^2 - 4x + 3 = 0$ D. $x^2 + 3x - 4 = 0$
12. 已知 $x_1 = 3$ 是关于 x 的一元二次方程 $x^2 - 4x + c = 0$ 的一个根, 则方程的另一个根 x_2 是 _____ .
13. 关于 x 的一元二次方程 $(a-1)x^2 + x + a^2 - 1 = 0$ 的一个根是 0, 则 a 的值为 () .
- A. 1 B. -1 C. 1或-1 D. $\frac{1}{2}$

栗子7

14. 已知 m , n 是方程 $x^2 + 2x - 5 = 0$ 的两个实数根, 则 $m^2 - mn + 3m + n =$ _____ .
15. 设 x_1 , x_2 是二次方程 $x^2 + x - 3 = 0$ 的两根, 则 $x_1^3 - 4x_2^2 + 19$ 的值为 () .
- A. 1 B. -1 C. 0 D. 2

栗子8

16. 关于 x 的一元二次方程 $x^2 - mx - 1 = 0$ 的两个实数根分别是 x_1 , x_2 , 且 $x_1^2 + x_2^2 = 7$, 则 $(x_1 - x_2)^2$ 的值是 () .
- A. 1 B. 12 C. 9 D. 25
17. 已知 x_1 , x_2 是方程 $2x^2 - 5x + 1 = 0$ 的两实数根, 求下列各式的值:
- (1) $x_1x_2^2 + x_1^2x_2$.
- (2) $(x_1 - x_2)^2$.
- (3) $\frac{x_2}{x_1} + \frac{x_1}{x_2}$.
18. 已知关于 x 的一元二次方程 $x^2 - (2m+3)x + m^2 + 2 = 0$.
- (1) 若方程有实数根, 求实数 m 的取值范围 .
- (2) 若方程两实数根分别为 x_1 、 x_2 , 且满足 $x_1^2 + x_2^2 = 31 + |x_1x_2|$, 求实数 m 的值 .

栗子9

19. 若实数 $a \neq b$, 且 a , b 满足 $a^2 - 8a + 5 = 0$, $b^2 - 8b + 5 = 0$, 则代数式 $\frac{b-1}{a-1} + \frac{a-1}{b-1}$ 的值为 () .
- A. -20 B. 2 C. 2或-20 D. 2或20
20. 若 $ab \neq 1$, 且有 $5a^2 + 2001a + 9 = 0$ 及 $9b^2 + 2001b + 5 = 0$, 则 $\frac{a}{b}$ 的值为 _____ .

栗子10

21. 设 $x^2 - px + q = 0$ 的两实数根为 α 、 β , 那么 α^2 、 β^2 为两根的一元二次方程是 _____ .

22. 已知 x 、 y 均为实数，且满足 $xy + x + y = 17$ ， $x^2y + xy^2 = 66$ 。求 $x^4 + x^3y + x^2y^2 + xy^3 + y^4$ 的值。